



ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР

1990

ТОМ 314 № 2

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукуджанов В.Н. — Усп. механики, 1985, т. 8, № 4, с. 21–65.
2. Грин А.Е., Нахди П.М. В сб.: Механика. 1965, № 5, с. 111–142.
3. Кукуджанов В.Н. Численное решение одномерных задач распространения волн напряжений в твердых телах. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1976, вып. 6. 67 с.
4. Булычев Г.Г. — Строит. механика и расчет сооружений, 1987, № 5, с. 56–59.
5. Кукуджанов В.Н., Булычев Г.Г. В сб.: Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Наука, 1988, с. 117–124.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
7. Butler D.S. — Proc. Roy. Soc., London, 1962, vol. A255.

УДК 629.195.1

МЕХАНИКА

© В.Г. ШИРОНОСОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЙ, БИФУРКАЦИИ, ХАОСЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 24 X 1989)

Вопрос об устойчивости неустойчивых состояний динамических систем, не содержащих в явном виде малый параметр, хаосе и бифуркациях в них с некоторыми пор все больше привлекает к себе внимание [1–14]. Это обусловлено тем, что данная проблема довольно часто возникает не только в математике, но и в различных областях механики и физики. В частности, особый интерес в последнее время приобрели задачи удержания атомных частиц в электродинамических ловушках [14].

Как правило, решение таких задач сводят к исследованию модельного уравнения — уравнения маятника с вибрирующей точкой подвеса

$$(1) \quad \ddot{x} + \varepsilon_r \dot{x} + (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos \tau) \sin x - \varepsilon_{-1} \cos(\tau + \varphi) \cos x = 0.$$

При малых углах отклонения x и $\varepsilon_{-1} = 0$ уравнение (1) приводится к хорошо известному уравнению Матье, которое допускает устойчивость неустойчивого состояния перевернутого маятника ($\varepsilon_0 < 0$, $\varepsilon_1 \neq 0$) вне зоны параметрического резонанса [2]. В 1982 г. авторы [6] на основе численного моделирования обнаружили устойчивые параметрически возбужденные колебания перевернутого маятника в зоне резонанса. Позднее [1, 4] были получены соответствующие зависимости амплитуд колебаний от ε_0 , ε_1 .

Помимо перечисленных, было рассмотрено множество других нетривиальных решений — колебательных, колебательно-вращательных, возникновение хаоса и т.д. [1, 3]. Однако большое разнообразие методов [1–6] и исследование (1) с разложением $\sin(x)$, $\cos(x)$ в ряд по степеням малости затруднило сшивку частных решений, интерпретацию полученных результатов и понимание причин возникновения хаоса, бифуркаций в системах, описываемых уравнениями типа (1).

Поэтому, учитывая два положения Пуанкаре [7, с. 75] о том, что "... периодические решения являются единственной брешью, через которую мы могли бы попытаться проникнуть в область, считавшуюся недоступной" (1) и то, что "... периодическое решение может исчезнуть, лишь слившись с другим периодическим решением", т.е. "... периодические решения исчезают парами подобно действительным корням алгебраических уравнений" (11), воспользуемся обобщением соот-

ветствующих методов для нахождения и исследования на устойчивость периодических решений (1) по критическим точкам функции действия [7–12].

Для этого переписем уравнение (1) в лагранжевой форме

$$(2) \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial x},$$

где

$$(3) \quad L = T - U, \quad T = \dot{x}^2/2, \quad F = \mathcal{E}_r \dot{x}^2/2, \\ U = -(\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 \cos \tau) \cos x - \mathcal{E}_{-1} \cos(\tau + \varphi) \sin x.$$

В общем случае x может быть вектором. Будем искать решение (2) вблизи периодического решения на частоте α в виде ряда

$$(5) \quad x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[x_n \cos(n\alpha\tau) + \frac{y_n}{n\alpha} \sin(n\alpha\tau) \right],$$

где x_0, x_n, y_n в общем случае $f(\tau)$.

Учитывая зависимость $x = f(x_k, y_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k)$, можно получить в приближении медленно меняющихся амплитуд x_k, y_k за период $2\pi/\alpha$ следующие укороченные уравнения:

$$(6) \quad \dot{x}_k \cong - \frac{\partial S}{\partial y_k} - \frac{\partial R}{\partial x_k}, \quad \dot{y}_k \cong \frac{\partial S}{\partial x_k} - \frac{\partial R}{\partial y_k},$$

где

$$y_0 = \dot{x}_0, \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \text{ и}$$

$$(7) \quad S = s - y_0^2, \quad s = \langle L \rangle = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} L \, d\tau,$$

$$R = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[y_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (x_n^2 + y_n^2) \right].$$

При выводе (6) учтено условие экстремальности функции действия (2). В переменных амплитуда – фаза уравнения (6) примут вид:

$$(8) \quad \dot{\psi}_n \cong \frac{1}{nr_n} \frac{\partial S}{\partial r_n}, \quad \dot{r}_n \cong - \frac{1}{nr_n} \frac{\partial S}{\partial \psi_n} - \mathcal{E}_r r_n,$$

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(n\alpha\tau - \psi_n).$$

В переменных действие – угол

$$(9) \quad \dot{\psi}_n \cong \frac{\partial S}{\partial \chi_n}, \quad \dot{\chi}_n \cong \frac{\partial S}{\partial \psi_n} - 2\mathcal{E}_r \chi_n,$$

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\chi_n}{n} \right)^{1/2} \cos(n\alpha\tau - \psi_n).$$

Вернемся к уравнению (1), будем искать решение в виде (8). Используя представление $\cos x = \text{Re} [\exp(ix)]$, формулы (8) и [15]

$$(10) \quad \exp[i\dot{r}_n \cos(n\alpha\tau - \psi_n)] = \sum_{k_n}^{+\infty} J_{k_n}(r_n) \exp[ik_n(n\alpha\tau + \pi/2 - \psi_n)],$$

получим

$$(11) \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \alpha^2 r_n^2}{4} - \frac{y_0^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2, \dots = -\infty}^{+\infty} \prod_{n=1}^{+\infty} J_{k_n}(r_n) \times \\ \times \sum_{\beta=-1}^{+1} \mathfrak{E}_\beta \delta^{\mp \beta} \sum_{n=1}^{\infty} k_{n\alpha} \cdot (1 + \delta_\beta^0) \cdot \cos \left[x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left(\frac{\pi}{2} - \psi_n \right) - \delta_\beta^{-1} \left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi \right) \right],$$

где $J_k(r_n)$ – функции Бесселя, δ_β^n – символ Кронекера.

Поиск периодических решений уравнений типа (1), как следует из (6), (8), (9), при $\mathfrak{E}_r \cong 0$ сводится к отысканию и исследованию на устойчивость критических точек (11) по r_n, ψ_n , либо $\chi_n, \psi_n(x_n, y_n)$ и x_0, y_0 .

В наиболее простом случае – математического маятника, без учета трения и вибраций, результаты вычислений (8) по S (11) с $n = 1$

$$(12) \quad S \cong \left[\frac{\alpha^2 r_1^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} + \mathfrak{E}_0 J_0(r_1) \cos x_0 \right]$$

свидетельствуют о вполне удовлетворительной точности $\alpha(r_1)$, так как ряд (11) быстро убывает с ростом индекса n при фиксированном значении аргумента r_n . Относительная погрешность приближения $\alpha(r_1)$ даже при углах отклонения маятника $x \sim 160^\circ$ не превышает 5,5% (см., к примеру, [5, с. 55]).

Введение продольной вибрации, как следует из выражения

$$(13) \quad S \cong \left[\frac{\alpha^2 r_1^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} + \mathfrak{E}_0 J_0(r_1) \cos x_0 + \mathfrak{E}_1 J_{1/\alpha}(r_1) \cos \left(x_0 + \frac{\pi}{2\alpha} \right) \cos \frac{\psi_1}{\alpha} \right]$$

и (8), приводит к появлению двух типов критических точек. Первым соответствуют положения равновесия $x_0 = \pm n\pi$, $\psi_1 = 0, \pm\pi/2, 1/\alpha$ – четные; вторым – $x_0 \neq \pm n\pi$, $\psi_1 = 0, \pm\pi, 1/\alpha$ – нечетные, $n = 0, 1, 2, \dots$ (в частности, $x_0 = \pm(2n+1)$ при $\mathfrak{E}_0 = 0$). Поэтому учитывая сценарий "слияния" двух периодических решений по Пуанкаре (11), вследствие наличия второго типа критических точек $x_0 \neq \pm n\pi$ (бифуркация периода $1/\alpha = 2 \iff 1/\alpha = 1$), будем искать решение задачи о перевернутом маятнике ($\mathfrak{E}_0 \cos x_0 < 0$) вне и в зоне параметрического резонанса в виде

$$(14) \quad x_0 \cong x_0 + r_1 \cos(\tau/2 - \psi_1) + r_2 \cos(\tau - \psi_2).$$

Такое представление (14) даст выражение S (11) точно до $n = 2$. Ограничиваясь членами порядка r_k^4 при разложении $J_n(r_k)$ в S (11) и используя переменные x_k, y_k (6), можно получить соответствующие уравнения для нахождения точек равновесия и характеристических корней λ_0 при малых \mathfrak{E}_r в аналитическом виде. В случае $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \sin x_0 = y_0 = 0$

$$(15) \quad \left\{ \lambda^2 + \frac{1}{16} [(1 - 4\mathfrak{E}_0^\pm)^2 - 4\mathfrak{E}_1^\pm] \right\} \cdot \left\{ \lambda^4 + \frac{\lambda^2}{4} (1 + \mathfrak{E}_0^\pm)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} (1 - \mathfrak{E}_0^\pm) [\mathfrak{E}_1^\pm + 2\mathfrak{E}_0^\pm (1 - \mathfrak{E}_0^\pm)] \right\},$$

где $\lambda = \lambda_0 + \mathfrak{E}_r$, $\mathfrak{E}_{0,1}^\pm = \mathfrak{E}_{0,1} \cos x_0$. Из первой скобки (15) получаем оценку верхней границы устойчивого решения $4(\mathfrak{E}_1^\pm)^2 < (1 - 4\mathfrak{E}_0^\pm)^2$, из второй – нижнюю $(\mathfrak{E}_1^\pm)^2 > 2|\mathfrak{E}_0^\pm(1 - \mathfrak{E}_0^\pm)|$ для перевернутого маятника ($\mathfrak{E}_0^\pm < 0$) вне зоны параметрического резонанса.

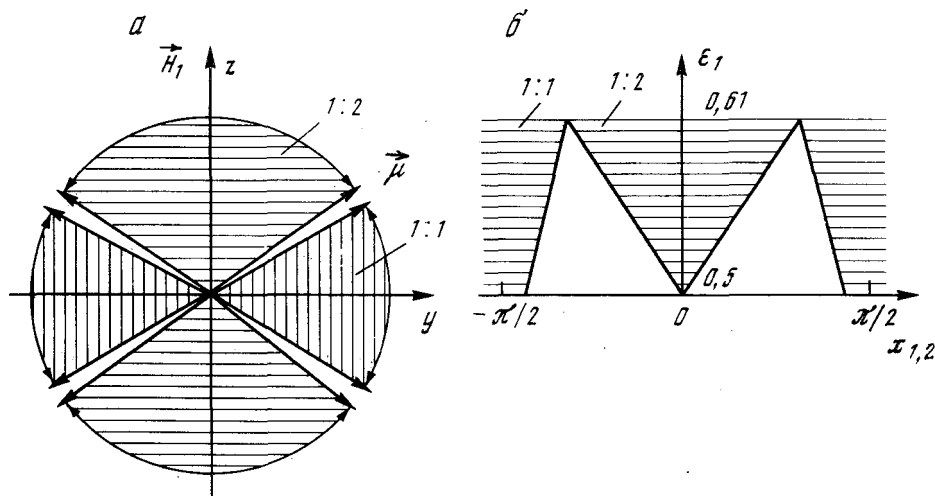


Рис. 1. Сценарий появления бифуркации для перевернутого маятника по Пуанкаре при $\epsilon_0 = 0$. а) $0,5 < \epsilon_1 < 0,61$; б) графики зависимости $x_{1,2}(\epsilon_1)$

В случае $x_1 \neq 0, y_1 = 0$ ($x_1 = 0, y_1 \neq 0$), из условий $S'_x = 0$ ($S'_y = 0$), можно получить

$$(16) \quad x_1^2 = 6 \left[\frac{4\epsilon_0^\pm + 2\epsilon_1^\pm - 1}{2\epsilon_1^\pm + 3\epsilon_0^\pm} \right] \left(y_1^2 = \frac{4\epsilon_0^\pm - 2\epsilon_1^\pm - 1}{3\epsilon_0^\pm - 2\epsilon_1^\pm} \cdot \frac{3}{2} \right);$$

$$(17) \quad \left[\lambda^2 + \frac{x_1^2}{24} (2\epsilon_0^\pm + \epsilon_1^\pm + 1) \right] f_x(\lambda) = 0$$

$$\left(\left[\lambda^2 - \frac{\epsilon_1^\pm}{6} y_1^2 (2\epsilon_0^\pm - 2\epsilon_1^\pm - 1) \right] f_y(\lambda) = 0 \right),$$

где $f_{x,y}(\lambda) = f(\lambda, \epsilon_{0,1}^\pm, x_1, y_1)$. Из (17) следует существование двух устойчивых состояний перевернутого маятника ($\epsilon_0^\pm < 0$) в зоне параметрического резонанса $2\epsilon_1^\pm > 4|\epsilon_0^\pm| + 1$ ($2|\epsilon_1^\pm| > 4|\epsilon_0^\pm| + 1$), отличающихся друг от друга только сменной знака ϵ_1^\pm .

В наиболее простом случае с $\epsilon_0 = 0$ точка бифуркации $1/\alpha = 2 \Leftrightarrow 1/\alpha = 1$ находится из совместного рассмотрения двух периодических решений по сценарию (11). Проводя аналогичные вычисления вблизи точки равновесия $x_0 = \pm(2n+1)\pi/2$, $x_1 = y_1 = y_0 = 0$ можно получить решения с $\alpha^{-1} = 1$

$$(18) \quad x_2 \cong \frac{4}{3\epsilon_1^*} \left(1 - \left(1 + \frac{3}{2} \epsilon_1^{*2} \right)^{1/2} \right), \quad \epsilon_1^* = \epsilon_1 \sin x_0, \quad y_2 = 0,$$

неустойчивые по x_0, y_0 при $|x_2| \neq \pi/2$. Решая совместно (16), (18) можно определить соответствующую точку бифуркации из условия (см. рис. 1):

$$(19) \quad |x_1^*(\epsilon_1')| + |x_2^*(\epsilon_1')| = \pi/2,$$

$$x_1^* \cong 59^\circ, \quad x_2^* \cong 31^\circ, \quad \epsilon_1' \cong 0,61.$$

В данном случае (с $\epsilon_0 = 0$) появление бифуркации может одновременно привести к возникновению хаоса в системе (1) (см. рис. 1). Причиной могут послу-

жить флуктуации, погрешности от макросистемы, используемой при физическом, аналоговом или численном моделировании детерминированной системы, описываемой уравнением (1). В результате будут наблюдаться каскады переходов между различными типами периодических движений при $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1$ (колебательными 1:2, 1:1; вращательными 1:1 и другими), воспринимаемые как хаос.

Машинное моделирование уравнения (1) на АЦВК ГВС "Русалка" и натурное моделирование на магнитной стрелке от компаса, помещенной в магнитное поле, подтвердили правильность полученных результатов в пределах погрешностей моделирования.

Автор признателен С.П. Курдюмову, Ю.П. Попову, В.А. Сарычеву и другим участникам семинара за обсуждение работы и полезные замечания.

Физико-технический институт
Уральского отделения Академии наук СССР
Ижевск

Поступило
23 XI 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М., 1987.
2. Капица П.Л. — ЖЭТФ, 1951, т. 21, с. 588.
3. Баталова З.С., Белякова Г.В. — ПММ, 1988, т. 52, с. 53.
4. Зевин А.А., Филоненко Л.А. — Изв. АН СССР. МТТ, 1986, № 5, с. 49.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1958.
6. Баталова З.С., Белякова Г.В. Динамика систем. Оптимизация и адаптация. Межвуз. сб. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1982, с. 145.
7. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. тр. М., 1971, т. 1.
8. Козлов В.В. — ДАН, 1986, т. 288, с. 289.
9. Белецкий В.В., Касаткин Г.В. — ДАН, 1980, т. 251, с. 58.
10. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М., 1981.
11. Валеев К.Г., Ганиев Р.Ф. — ПММ, 1969, т. 33, с. 413.
12. Ovenden M.W., Feagin T., Graff O. — Celestial Mech., 1974, vol. 8, № 4, p. 455.
13. Бонштедт А.В., Широносов В.Г. — Письма в ЖТФ, 1989, т. 15, № 5, с. 82.
14. Тошек П.Э. — УФН, 1989, т. 158, вып. 3, с. 451.
15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников. М., 1968.